

ASPECTE PRIVIND APLICAREA FORMULELOR DE CALCUL APROXIMATIV LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MECANICĂ

Autori: Radu-Sebastian COJOCARU ¹, Xenia-Denisa VLĂDUȚU ¹
sebastianradu.cojocaru@gmail.com

Coordonatori: Asist.univ.dr.ing. Bogdan-Ioan MARC ², Șef lucr.dr. ing. Susana APOSTU ²

¹ *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Mașini și echipamente miniere, anul I*

² *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.*

Rezumat

În această lucrare este evidențiată importanța formulelor de calcul aproximativ la rezolvarea problemelor de mecanică. Pentru exemplificare s-au rezolvat trei probleme în care apar formulele de calcul aproximativ.

Cuvinte cheie

calcul aproximativ, formule, plan înclinat, mecanică

1. Introducere

În știință, o formulă este un mod simbolic și concis de a exprima informație, ca în cazul formulelor matematice.

În matematică, un calcul este o operație sau un set de operații efectuate pe cantități. Inițial aceste cantități erau numere, dar dezvoltarea instrumentelor matematice și a abstractizării face acum posibilă efectuarea de calcule pe obiecte mai complexe (funcții, vectori, propoziții). Ulterior, informatica a făcut posibilă efectuarea de calcule pe o varietate de date formale în mod fluent, iar calculul a devenit un obiect de studiu în teoria calculabilității.

„Cuvântul calcul, însuși simbolul erei noastre științifice și tehnice, derivă din cuvântul latin calculus care înseamnă pietricică mică”. Aceste pietre mici sunt la originea unuia dintre cele mai vechi sisteme de contabilitate descoperite astăzi. Utilizarea pietricelelor pentru a simboliza măsurători de oameni, animale sau cereale și pentru a efectua adunări și scăderi este fundamentală în dezvoltarea calculului matematic. Primul instrument de calcul silențios și simbolic, este precursorul unei întregi familii de ajutoare de calcul care sunt diagramele.

Un calcul este exact atunci când rezultatul furnizat nu diferă în niciun fel de rezultatul căutat. Calculul unei sume, diferențe sau produse se poate face cu exactitate dacă valorile inițiale sunt corecte și dimensiunea numărului nu depășește capacitatea de calcul. Pe de altă parte, este frecvent ca calculul unui coeficient sau al unei rădăcini să conducă doar la o valoare aproximativă. Vorbim apoi de calculul aproximativ. De multe ori se caută să se asigure, cu rezultatul aproximativ, o creștere a erorii comise. De exemplu, $7/3$ este aproximativ egal cu 2,33 cu o eroare implicită mai mică de 0,01 sau altfel π este aproximativ egal cu 256/81. Calculul aproximativ al π a fost cunoscut egiptenilor din xvii - lea lea î.Hr.. AD. Anumite calcule de suprafață și volum pot fi efectuate numai în valori aproximative.

Calculul aproximativ apare foarte devreme în istoria calculului. Acesta este responsabil pentru crearea de tabele numerice de valori aproximative: Tabelul de sinusuri din India și printre matematicieni limba arabă, tabel de logaritmi în Europa în xvii - lea secol. Este un obiect de studiu în Europa de la xvii E secol odată cu dezvoltarea funcțiilor în serii întregi, și cercetarea valorilor apropiate de zero a unei funcții. Rămâne foarte actual și legat de capacitățile de calcul ale computerelor.

În matematică, o expresie sau expresie matematică este o combinație finită de simboluri, bine formată după reguli care depind de context. Simbolurile matematice pot desemna numere (constante), variabile, operații, funcții, paranteze, punctuație și grupare pentru a ajuta la determinarea ordinii operațiilor și alte aspecte ale sintaxei matematice.

Mulți autori disting o expresie de o formulă, prima definind un obiect matematic, iar a doua o afirmație despre obiecte matematice. De exemplu, $8x-5$ este o expresie, în timp ce $8x-5 \geq 5x-8$ este o formulă. Un alt aspect apare în matematica modernă, în special în calculul formal, unde formulele sunt privite ca expresii care pot fi evaluate prin valoare de adevăr adevărate sau false, în funcție de valorile variabilelor care apar în expresii. De exemplu $8x-5 \geq 5x-8$ este falsă dacă x are o valoare mai mică decât -1 și adevărată în caz contrar.

În logică și matematică, o formulă este o serie finită de obiecte, dotate cu proprietăți particulare care fac posibilă sintaxa în toate aceste câmpuri.

2. Formulele de calcul aproximativ

Rezolvarea oricărei probleme de fizică pornește, în primul rând, de la clarificarea faptului care din fenomene fizice descrise în problemă joacă un rol principal și care – un rol secundar. Neglijarea fenomenelor secundare conduce nemijlocit la neglijarea mărimilor fizice relativ mici, adică la calcule aproximative. Cunoașterea

formulelor de calcul aproximativ și abilitarea folosirii acestora reduc cu mult calculele. Din cursul de matematică se cunoaște că expresia $(1 + n)^n$ pentru $|x| < 1$ poate fi prezentată în forma :

$$(1 + n)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (1)$$

Aici n reprezintă orice număr real. Pentru n natural această sumă se descompune în termeni cu puterea n , iar formula obținută se numește *formula lui Newton*. Aceasta are următoarea expresie:

$$(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \left(1 + n \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \dots\right). \quad (2)$$

Dacă $|b| \ll |a|$, componentele care conțin raportul b/a la puterea a doua și mai sus pot fi neglijate și ne putem limita doar la primii doi termeni:

$$(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \approx a^n \left(1 + n \frac{b}{a}\right). \quad (3)$$

Ce greșeală se comite la utilizarea acestei formule aproximative? Pentru evaluare se poate considera că greșeala este egală cu termenul al treilea a descompunerii obținute.

La rezolvarea problemelor de fizică, deseori, sunt admise erori de calcul de aproximativ 1 %. Din relația (3) se poate determina valoarea maximă a raportului b/a , pentru care exactitatea calcului se încadrează în limitele admisibile.

Formulele pentru calculele aproximative a valorilor funcțiilor trigonometrice, de asemenea, sunt simple și confortabile. Dacă unghiul α , exprimat în radiani, este mic, atunci putem face următoarele aproximații:

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (4)$$

$$tg \approx \alpha \quad (5)$$

$$\cos \alpha \approx 1. \quad (6)$$

Calculul arată că erorile nu depășesc 1 % dacă unghiul α satisface următoarele condiții:

$$\alpha \leq 23^\circ (\approx 0,40 \text{ rad}) \text{ pentru } \sin \alpha,$$

$$\alpha \leq 18^\circ (\approx 0,31 \text{ rad}) \text{ pentru } tg \alpha,$$

$$\alpha \leq 8^\circ (\approx 0,14 \text{ rad}) \text{ pentru } \cos \alpha,$$

În fizică frecvent se utilizează funcția exponențială $y = a^x$. Pentru valori mici ale lui x se îndeplinește egalitatea aproximativă:

$$a^x \approx 1 + \frac{\lg a}{0,43} x. \quad (7)$$

2. Exemple de aplicații care se rezolvă cu ajutorul formulelor de calcul aproximativ

2.1. Un corp alunecă pe un plan înclinat, ce formează unghiul $\alpha = 70^\circ$ față de orizont. Determinați accelerația corpului, dacă coeficientul de frecare a corpului cu planul înclinat $\mu = 0,03$.

Rezolvare :

Asupra corpului, ce se mișcă pe planul înclinat, acționează trei forțe: forța de greutate \vec{G} orientată vertical în jos, forța de frecare \vec{F}_f , orientată în sus pe planul înclinat, și forța de reacțiune normală \vec{N} perpendiculară la planul înclinat (fig. 2).

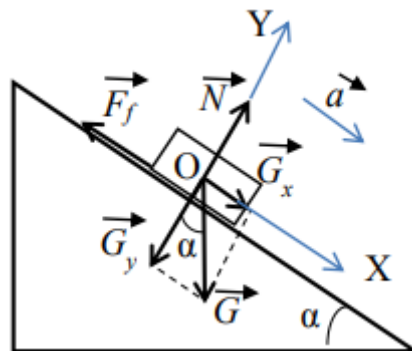


Fig. 1. Corp pe planul înclinat

Scriem ecuația vectorială a mișcării:

$$\vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (8)$$

Proiectăm forțele pe axele de coordonate OX și OY și obținem două ecuații scalare:

$$mgsin\alpha - F_f = ma, \quad (9)$$

$$N - mgcos\alpha = 0 \quad (10)$$

Ținând cont că :

$$F_f = \mu N \quad (11)$$

după mai multe transformări, obținem:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad (12)$$

Deoarece $\alpha < 80$ putem folosi formulele de aproximare (5) și (7). Considerat $\cos\alpha \approx 1$ și $\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{7}{60} \text{rad} \approx 0,12 \text{rad}$, obținem:

$$a = 9,8 \frac{m}{s^2} (0,12 - 0,03) = 8,8 \frac{m}{s^2} \quad (13)$$

2.2 Cu câte procente se va modifica forța de greutate a unui corp odată cu ridicarea acestuia la înălțimea $h = 1 \text{ km}$ deasupra Pământului? Se consideră Raza Pământului $R = 6400 \text{ km}$.

Rezolvare :

Forța de greutate a corpului de masă m la suprafața Pământului este :

$$F_0 = K \frac{mM}{R^2} \quad (14)$$

unde K este constanta gravitațională, iar M – masa Pământului.

Pe măsură ce ne îndepărtăm de la suprafața Pământului forța de greutate a corpului se micșorează și la înălțimea h este :

$$F = K \frac{mM}{(R+h)^2} \quad (15)$$

Variația relativă a forței de greutate este :

$$\frac{F_0 - F}{F_0} = 1 - \frac{F}{F_0} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \quad (16)$$

Deoarece $h \ll R$ rezultă că $h/R \ll 1$ și folosind formula (3), obținem :

$$\frac{F_0 - F}{F_0} = 1 - \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) = 2\frac{h}{R} \quad (17)$$

Făcând calculele, obținem:

$$\frac{F_0 - F}{F_0} = \dots \approx 0,0003 = 0,03\% \quad (18)$$

2.3 În teoria relativității energia cinetică a particulei E_C se exprimă prin relația $E_C = E - E_0$, unde E este energia totală a particulei, iar E_0 este energia de repaus a particulei. Demonstrați că, dacă viteza particulei $v \ll c$ (unde c este viteza luminii în vid), energia cinetică este aproximativ egală cu $m_0 v^2 / 2$, unde m_0 este masa de repaus a particulei.

Rezolvare :

Conform teoriei relativității:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (19)$$

iar

$$E = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (20)$$

unde m este masa de mișcare a particulei. Rezultă că:

$$E_C = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right). \quad (21)$$

Deoarece $v \ll c$, adică $v/c \ll 1$, rezultă că $v^2/c^2 \ll 1$ și aplicând formula (3), obținem:

$$E_C = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} (v/c)^2 - 1 \right) = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0 v^2}{2} \quad (22)$$

Concluzii

În concluzie putem spune că unele concepte și noțiuni din matematică le putem aplica și în rezolvarea problemelor de mecanică după cum am văzut și exemplul formulelor de calcul aproximativ.

Bibliografie

- [1] Roșculeț, M., N., Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973;
- [2] Voinea, R., s.a. – Mecanica solidului cu aplicații în inginerie, Editura Academiei, București, 1989;
- [3] Huidu, T., Popa, A., Marin, C. – Culegere de probleme și teme aplicative de mecanică – Statica, Editura Macarie.

O ANALOGIE ÎNTRE ELECTROTEHNICĂ ȘI MECANICĂ

Autori: Alexandra Ștefania POPESCU ¹, Ovidiu UNGUREANU ²
alexandraa02@yahoo.com

Coordonatori: Conf.univ.dr.ing. Ilie UȚU ³, Șef lucr.dr. ing Răzvan Bogdan ITU ³

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Electromecanică anul IV

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Electromecanică Horezu anul IV

³ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E

Rezumat

Asimilarea cunoștințelor prin analogie reprezintă una din modalitățile de mare eficiență. Folosind analogia se poate pătrunde mai profund în tainele cunoașterii. În lucrare se prezintă prin analogie două fenomene, unul din electrotehnică și celălalt din mecanică.

Cuvinte cheie

Analogie, electrotehnică, mecanică.

1. Introducere

Analogia este una din metodele științifice de cunoaștere. La baza analogiei stă comparația. În cazul în care este evident că două sau mai multe fenomene, obiecte, se aseamănă, prin comparare, se face asemănarea între alte componente. Compararea prin analogie poate fi atât adevărată, cât și falsă. Valoarea analogiei este mare, deoarece crește nivelul teoretic de prezentare. În practică, analogia este folosită, în special, pentru a explica concepte și legi dificile, deja introduse. Alegerea analogiilor presupune atenție și precauție. Se cunosc foarte multe analogii neștiințifice, bazate numai pe asemănarea exterioară și care nu numai că reflectă greșit esența fenomenelor lor, dar le și deformează.

În continuare vom prezenta fenomenele ce se compară prin analogie, unul din electrotehnică și celălalt din mecanică.

2. Fenomenul electric

Să presupunem ca ni se dau două condensatoare electrice de capacități diferite ($C_1 \neq C_2$), care se încarcă la tensiuni electrice diferite ($U_1 \neq U_2$). După încărcare, condensatoarele sunt deconectate de la sursele de tensiune și se conectează în paralel. Ceea ce ne propunem să determinăm este energia pierdută (ΔW_e) după conectarea în paralel a condensatoarelor.

Deoarece $U_1 \neq U_2$, la conectarea în paralel a condensatoarelor se pierde o cantitate de energie prin conducție (deplasarea electronilor) care se disipă în mediul exterior sub formă de căldură (efect Joule în conductoarele de conexiune).

Energia celor două condensatoare, înainte de conectarea lor în paralel, este:

$$W_1 = \frac{1}{2}(C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2), \quad (1)$$

Energia condensatoarelor, după conectarea lor în paralel, este:

$$W_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2, \quad (2)$$

în care U este tensiunea comună la bornele condensatoarelor după conectarea în paralel.

Pentru a determina tensiunea U utilizăm *legea conservării sarcinii electrice*.

Legea conservării sarcinii electrice stabilește o legătură între sarcina electrică dintr-o suprafață închisă S și intensitatea curentului electric prin suprafață. În regim electrostatic, dacă suprafața închisă S formează un sistem izolat, atunci sarcina electrică din interiorul sistemului izolat este constantă.

În formă integrală legea conservării sarcinii electrice se enunță astfel: intensitatea curentului electric de conducție total i_S care iese printr-o suprafață închisă S oarecare este în fiecare moment egală și de semn contrar cu derivata sarcinii electrice adevărate Q_S (din interiorul suprafeței) în raport cu timpul.

Înseamnă că există o variație a sarcinii electrice adevărate din interiorul unei suprafețe închise S numai dacă există un transport de sarcină (curent electric) prin suprafața S .

Astfel avem:

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2)U, \quad (3)$$

din care:

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}, \quad (4)$$

Înlocuind (4) în (2) se obține:

$$W_2 = \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}, \quad (5)$$

Utilizând (1) și (5) determinăm pierderea de energie $\Delta W_e = W_1 - W_2$:

$$\Delta W_e = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}, \quad (6)$$

Luând în considerare faptul că $C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = C_s$ în care C_s , este capacitatea electrică echivalentă a celor două condensatoare conectate în serie, relația (6) se mai poate pune sub forma:

$$\Delta W_e = \frac{C_s}{2} (U_1 - U_2)^2, \quad (7)$$

Este evident că în cazul în care $U_1 = U_2$, pierderea de energie este nulă. În situația în care unul din condensatoare este descărcat ($U_1 = 0$ sau $U_2 = 0$) din (7) rezultă:

$$\Delta W_e = \frac{C_s U_1^2}{2} \quad \text{sau} \quad \Delta W_e = \frac{C_s U_2^2}{2}, \quad (8)$$

3. Fenomenul mecanic

În cele ce urmează, vom arăta, ca între studiul pierderii de energie în cazul celor două condensatoare și în cazul pierderii de energie a două corpuri care se ciocnesc perfect plastic, există o analogie perfectă.

Ciocnirea este fenomenul mecanic ce constă în interacțiunea a două sau mai multe corpuri într-un interval de timp foarte mic, $\Delta t \rightarrow 0$.

Ciocnirea plastică este ciocnirea în care în urma interacțiunii corpurile devin solidare, continuând să se miște împreună ca un singur corp, ansamblu.

Presupunem deci două corpuri (de exemplu două bile) de mase diferite ($m_1 \neq m_2$) și viteze diferite ($v_1 \neq v_2$) care se ciocnesc centric și în linie dreaptă.

Vitezele fiind de sens iar ciocnirea fiind perfect plastică, se pune problema determinării pierderii de energie în urma ciocnirii.

Într-adevăr, în urma ciocnirii celor două corpuri, o parte din energia lor inițială se pierde ca urmare a lucrului mecanic consumat în deformarea plastică ca prin căldura degajată în mediul exterior ca urmare a frecărilor în procesul deformării plastice.

Energia celor două corpuri înainte de ciocnire era:

$$W_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (1')$$

Energia sistemului celor două corpuri după ciocnire este:

$$W_2' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2, \quad (2')$$

în care v este viteza comună a celor două corpuri după ciocnirea lor plastică.

Deoarece impulsul mecanic se conservă în orice ciocnire rezultă că pentru a determina viteza v utilizăm legea conservării impulsului:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) \bar{v}, \quad (3')$$

Ciocnirea fiind dreaptă, din (3') rezultă:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4')$$

Substituind (4') în (2') se obține:

$$W_2' = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (5')$$

Utilizând relațiile (1') și (5') determinăm pierderea de energie $\Delta W_m = W_1' - W_2'$:

$$\Delta W_m = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (6')$$

În ciocnirea plastică, energia cinetică a corpurilor nu se mai conservă, deoarece o parte din energia cinetică inițială se transformă în căldură, Q , rezultat al lucrului mecanic de deformare.

$$Q = -\Delta W_m = -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (9)$$

Dacă notăm masa redusă a două corpuri cu m_r , care este o medie armonică a celor două mase:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \Rightarrow m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (10)$$

Notăm cu $v_{rel} = v_1 - v_2$, viteza relativă a corpului 1 față de corpul 2, obținem formula mai concentrată a căldurii cu următoarea expresie:

$$Q, \quad (10)$$

Din (6') rezultă că dacă $v_1 = v_2$, pierderea de energie este nulă ($\Delta W_m = 0$). În situația în care unul din corpuri se află în repaus ($v_1 = 0$ sau $v_2 = 0$) din (6') rezultă:

$$\Delta W_m = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} \text{ sau } \Delta W_m = \frac{m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (7')$$

Analizând comparativ relațiile (1) ... (6) cu relațiile (1') ... (6') se constată o analogie perfectă:

$$\Delta W_e \Leftrightarrow \Delta W_m, \quad C_1 \Leftrightarrow m_1, \quad C_2 \Leftrightarrow m_2$$

$$U_1 \Leftrightarrow v_1, \quad U_2 \Leftrightarrow v_2, \quad U \Leftrightarrow v$$

Deci tensiunile electrice sunt analoage cu vitezele, iar capacitățile electrice cu masele corpurilor ce se ciocnesc plastic.

Legea conservării sarcinii electrice este analoagă legii conservării impulsului.

O lege de conservare afirmă că o anumită proprietate măsurabilă a unui sistem fizic izolat nu se schimbă atunci când sistemul evoluează.

Prin analogie putem considera o „masă echivalentă serie”:

$$m_s = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Tot așa se poate defini o masă echivalentă paralel:

$$m_p = m_1 + m_2 \Leftrightarrow C_p = C_1 + C_2$$

Conchidem prin a preciza că analogia este folosită cu succes în cercetarea științifică în general cu rezultate dintre cele mai surprinzătoare.

Concluzii

Asimilarea cunoștințelor prin analogie reprezintă una din modalitățile de mare eficiență, în măsura în care se dispune de materiale necesare și se evită analogiile negative. Folosind analogia se poate pătrunde mai profund în tainele cunoașterii. Eficacitatea maximă pentru utilizarea analogiei este atunci când avem posibilitatea de a verifica și matematic unele legități, fenomene și probleme. Implică o dezvoltare mai complexă a capacităților de gândire și sporește interesul față de studiul mecanicii și al științelor, în general.

Bibliografie

[1] Sfichi, R., Caleidoscop de fizică, Editura Albatros, București, 1988;

[2] *** <https://www.telework.ro/ro/legile-conservarii-in-fizica/>

[3] *** <https://www.scrigroup.com/tehnologie/electronica-electricitate/LEGEA-CONSERVARIII-SARCINII-ELE22214.php>

STUDIUL INFLUENȚEI COEFICIENȚILOR ÎNCĂRCĂRILOR ASUPRA STRUCTURII METALICE PORTANTE A UTILAJELOR MINIERE

Autori: Dumitru-Neluțu GĂLĂȚAN¹, Tudor-Bujor VOINA²
nelutugalatan1@gmail.com

Coordonator: Șef.lucr.dr.ing. Stela DINESCU³, Șef.lucr.dr.ing. Florin VÎLCEANU³

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de inginerie Mecanică și Electrică, Mașini și echipamente miniere, anul IV

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de inginerie Mecanică și Electrică, Instalații și echipamente pentru procese mecanice, MIEP anul I

³ Universitatea din Petroșani, Facultatea de inginerie Mecanică și Electrică, Departamentul de Inginerie Mecanică, Industrială și Transporturi

Rezumat

Structurile metalice portante, elementele metalice de rezistență pe care sunt dispuse organele de lucru și mecanismele de acționare ale utilajelor miniere de mică sau mare capacitate sunt realizate prin sudarea elementelor sau prin îmbinări cu șuruburi și sunt supuse acțiunii unor forțe sau cupluri care constituie sarcinile utile. Deoarece structurile utilajelor sunt structuri complexe mixte (în special din bare, plăci, cabluri) care au legături interioare și exterioare, încărcări complexe și comportări diferite ale materialelor constitutive, analiza și proiectarea structurală se face pe un model structural simplificat. Ca studiu de caz am realizat analiza cu element finit a structurii portante a brațului roți portcupe a excavatorului tip ERc 1400-30/7 punând în evidență deformațiile globale ale structurii brațului roți portcupe precum și tensiunile pe elementele portante. Din analiza deplasărilor globale și a tensiunilor echivalente se obțin informații despre deformările elementelor componente și a stării de tensiuni.

Cuvinte cheie

structură metalică portantă, coeficientul încărcărilor, braț roată portcupe, deformații globale, tensiunea echivalentă

1. Introducere

Determinarea parametrilor de răspuns, care să satisfacă ecuațiile de guvernare ale unei structuri portante (ecuația operațională și condițiile la limită aferente), se poate face prin trei tipuri de metode (Vîlceanu, 2018):

- Metoda analitică (clasică) - soluție de formă închisă;
- Metoda numerică - Metoda elementelor finite: liniară, neliniară, flambaj, termic, dinamică, oboseală;
- Metoda experimentală - măsurarea efectivă a anumitor parametri fizici, metode de lucru cea mai utilizată fiind cea tensometrică.

Echipamentele grele mobile pentru industria minieră, construcții, terasamente necesită utilaje cu mase de lucru și puteri mari. Astfel excavatoarele tip ERc1400-30/7, excavatoare cu acțiune continuă figura 1.a sau excavatorul cu acțiune discontinua tip Liebherr R9800, figura 1.b, sunt utilaje mari pentru care calculul analitic clasic ar fi extrem de greoi.(Dinescu et al, 2019)(Vîlceanu et al, 2022)



a



b

Fig.1 Tipuri de utilaje: a - excavatorul tip ERc1400-30/7
b - excavatorul tip Liebherr R9800

Astfel, se poate observa că singurele metode pretabile la calculul de rezistență, calculul de verificare sau testare sunt: metoda elementului finit, iar în stadiul final, după realizarea mașinii, metoda tensometrică.

2. Considerații teoretice

2.1 Încărcări de calcul

Structurile metalice portante, elementele metalice de rezistență pe care sunt dispuse organele de lucru și

mecanismele de acționare ale utilajelor miniere de mare capacitate (ERc 1400, SRs 2000, Liebherr R 9800) sau de capacitate mai mica (buldozere, încărcătoare frontale, autogredere etc.), sunt realizate prin sudarea elementelor sau prin îmbinări cu șuruburi.

Acestea sunt supuse acțiunii unor forțe sau cupluri care constituie sarcinile utile.

Forțele exterioare se clasifică după mărimea suprafeței pe care acționează, și după modul de aplicare în timp a sarcinii (Vilceanu et al, 2022):

- *Forțele concentrate (nodale)* –reprezintă forțele care se transmit de la un element de construcție sau organ de mașină prin intermediul unei suprafețe de contact de dimensiuni foarte mici în raport cu dimensiunile întregului element, de exemplu, presiunea exercitată de roțile unui tren pe șine
- *Forțele distribuite (repartizate)* sunt aplicate în mod continuu pe o anumită lungime sau suprafață

Prin *acțiune* se înțelege orice cauză capabilă să genereze stări de solicitare mecanică, eforturi sau deformații, într-o structură portantă sau element structural. În vederea folosirii în calcul, acțiunile se schematizează în încărcări. Astfel, prin *încărcare* se înțelege reprezentarea pe baza unor convenții stabilite anterior a unei acțiuni utilizate în calculul structurilor.

Deoarece există fluctuații ale încărcărilor în funcție de natura lor, normativele prevăd câte o încărcare de referință pentru diferite tipuri de acțiuni, denumită *încărcare normată*. Față de aceasta, variabilitatea acțiunii în sens nefavorabil se preia în calcul prin *coeficienții încărcărilor* (n_i), sau *factorii de siguranță*, stabiliți pentru fiecare acțiune, pentru diferite stări limită de norme de ramură specifice pentru tipul de utilaj. Modul de stabilire a încărcărilor este valabil pentru orice tip de utilaj, excavator, buldozer, buldoexcavator, etc. funcție de condițiile de lucru.

Valoarea de proiectare a unei sarcini F_p este determinată de:

$$F_p = \gamma_F \cdot \psi \cdot F_k \quad (1)$$

unde: γ_F - este factorul de siguranță parțial care este asociat cu sarcina de lucru

F_k este valoarea caracteristică a sarcinii de lucru.

Pentru utilajele miniere sau cele destinate lucrărilor de infrastructură conform DIN 22261-2, combinațiile de sarcini sunt[2]:

H - Sarcină principală, inclusive greutatea proprie;

HZ- Sarcini principale și sarcini suplimentare;

HZS- Sarcini principale, sarcini suplimentare și sarcini speciale;

HZG - Sarcini principale, sarcini suplimentare și sarcini limită.

iar valorile coeficientului de siguranță γ corespunzătoare acestora sunt date în tabelul 1.

Tabelul 1. Valorile coeficientului de siguranță γ

Caz sarcină	H	HZ	HZS	HZG
Coeficient de siguranță γ	1,5	1,33	1,2	1,1

Diferitele tipuri de încărcări pot solicita o structura metalică simultan sau alternativ. Pentru a ține cont de posibilitatea apariției simultane a mai multor acțiuni, normele de proiectare prevăd o serie de reguli pentru gruparea acestora, funcție de starea limită luată în considerare.

$$1,5 \sum_{i=1}^n H_n + 1,33 HZ \quad (2)$$

Prin stare limită se înțelege starea în afara căreia structura nu mai satisface criteriile (cerințele) adoptate în cadrul procesului de concepție/proiectare. Stările limită pot fi corespunzătoare dacă sunt satisfăcute o serie de condiții concretizate prin constante de lucru. Aceste condiții pot fi (Vilceanu et al, 2022):

- *Condiția de rezistență*: se consideră că piesa este corespunzătoare dacă tensiunile efective σ_{ef} nu depășesc anumite limite stabilite pe cale experimentală (rezistența admisibilă σ_a).

Condiția de rezistență este de forma: $\sigma_{ef} \leq \sigma_a$.

- *Condiția de rigiditate*: se impune ca deformațiile pieselor să nu depășească anumite limite stabilite prin normative de ramură;
- *Condiția de stabilitate*: presupune faptul că deși condițiile de rezistență sunt satisfăcute, la anumite valori ale sarcinilor numite sarcini critice piesele își pot pierde echilibrul stabil, ceea ce duce la distrugerea lor. Condiția de stabilitate ale pieselor impune ca sarcinile efective să fie inferioare sarcinilor critice.

2.2. Etapele analizei cu element finit la structurile portante

Orice structură metalică portantă are un sistem geometric pe care este dispusă o structură de rezistență, alcătuită din elemente numite elemente de rezistență (bare, plăci, învelișuri sau blocuri). Având în vedere elementele care intră în componența structurilor de rezistență, acestea pot fi grupate în (Vilceanu, 2018):

- structuri din bare (articulate sau legate rigid în noduri), cabluri;
- structuri alcătuite din plăci, învelișuri;

- structuri mixte, alcătuite din bare, plăci, învelișuri, cabluri.

Aceasta presupune schematizarea structuri și a elementelor de construcții componente ca formă, dimensiuni geometrice, material constitutive și chiar neglijând unele elemente neportante.

Analiza structurală presupune parcurgerea următoarelor etape:

- ✓ **preprocesare** - construire model matematic cu elemente finite, încărcări, condiții de rezemare;
- ✓ **rezolvarea** sistemelor de ecuații: programul assemblează și rezolvă sistemul de ecuații, calculează valorile parametrilor caracteristici în interiorul elementelor;
- ✓ **postprocesare**: sortează și afișază rezultatele,

Toate aceste etape pot fi schematizate în digrama din figura 2 (Vilceanu, 2018).

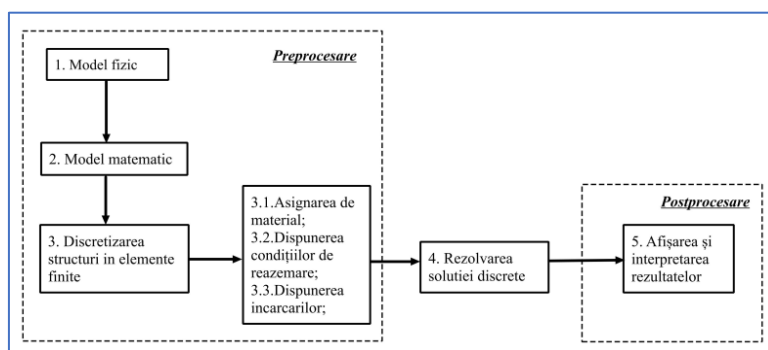


Fig.2. Etapele analizei prin metoda elementului finit

Dat fiind faptul ca structurile utilajelor sunt structuri complexe mixte în special din bare (laminat sau cu secțiune compusă), plăci, cabluri au legături interioare și exterioare, precum și complexitatea încărcărilor și a comportării materialelor constitutive, analiza și proiectarea structurală se face pe un model structural simplificat (idealizat), figura 3.

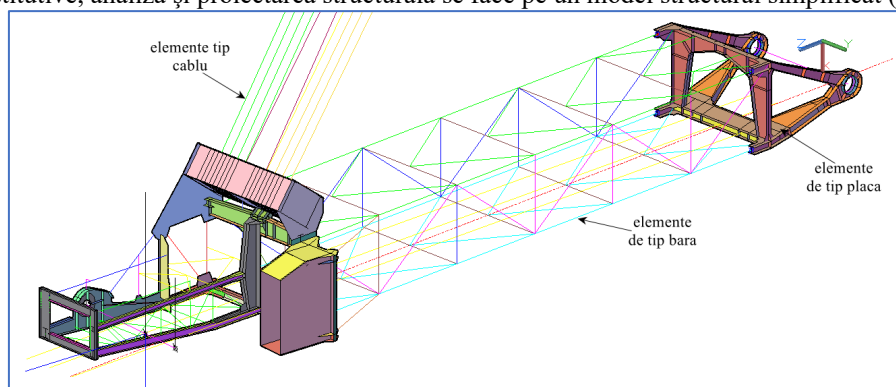


Fig. 3. Structură metalică portantă, model simplificat

3. Studiu de caz – Analiza statică a structurii portante a brațului roți portcupe a excavatorului tip ERc 1400-30/7

Analiza utilizată este static liniară folosită în scopul de a determina starea de tensiuni și deformații sub acțiunea unor combinații de încărcări din brațul roți portcupe a utilajului Erc 1400-30/7, figura 4 (Dinescu et al, 2019).



Fig.4. Subansamblu braț roată portcupe a excavatorului tip ERc 1400-30/7

Brațul roții portcupe este o structura spațial compusă din elemente de tip bară de diferite tipuri de secțiuni de tip I, U laminate sau secțiuni laminate compuse de tip 2xU, 2xL, sau sudate cruce de Malta, secțiune T sudată. Deasemnea sunt folosite elemente de tip cablu, pentru ridicarea coborâre, cablu WS $\phi 40-6 \times 36$ zincat -S/Z. Toate aceste elemente au fost asignate pe modelul simplificat din figura 3, formând modelul matematic al brațului, figura 5.

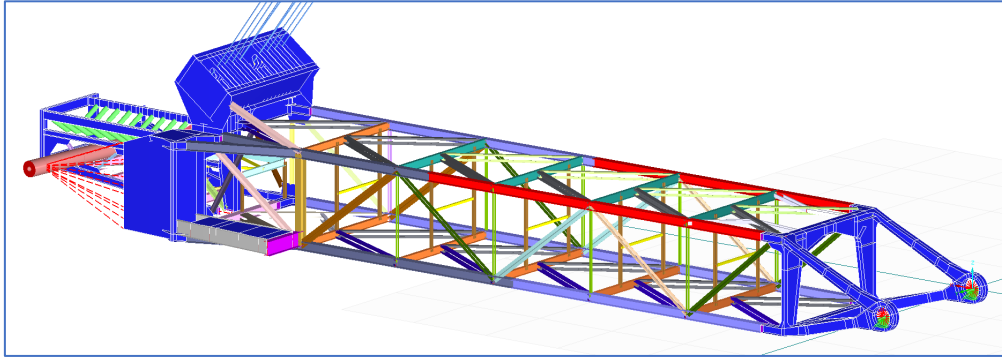


Fig.5. Asignarea elementelor structurale pe structură

După asignarea elementelor structural se va efectua discretizarea structurii și asignarea constrângerilor pe structura realizată prin simplificarea modelului real, figura 6.

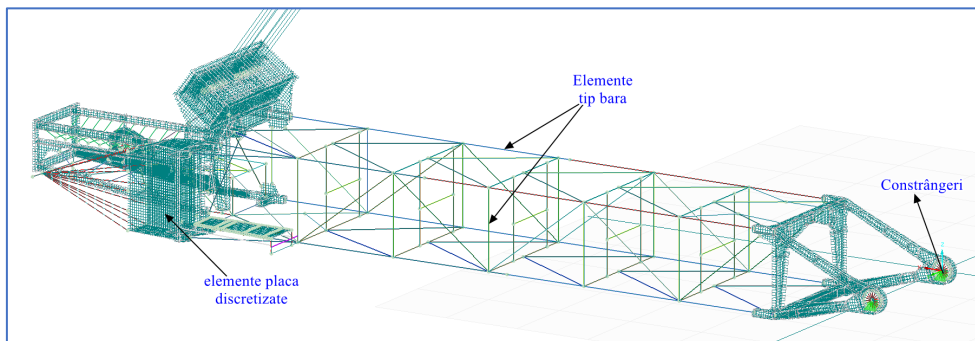


Fig.6. Discretizarea structurii braț roată portcupe

- Încărcările pe brațul roți portcupe vor fi (Vilceanu, 2018):
 - ✓ Pe transportorul cu bandă (Tabelul 2)

Tabelul 2. Încărcările pe transportorul cu bandă

Nr.	Denumire	Valoare normată		Factorul de încărcare [γ]	Obs
		notație	Valoare		
1	Încărcarea proprie din elementele structurale	Self-weight (LC1)	Se determină automat de program	1.5 ^(a)	-
2	Încărcări role superioare	q.i.sup (LC2)	11,76 [kN]	1,1	Conf. DIN 22261-2
3	Încărcarea datorată covorului de bandă	q _B [N/m] (LC3)	0,571 [kN/m]	1.25 ^(a)	Conf. DIN 22261-2.
4	Combi-nația încărcărilor	CO1	1.5 LC1+1.0 LC2+1,25 LC3		
(a) Se consideră factorul de încărcarea mare, deoarece am luat în calcul depunerile de material pe covorul de bandă, pe structura portantă a transportorului și întreg ansamblu					

✓ Încărcări pe arborele roții cu cupe din componentele permanente (Tabelul 3) (Vilceanu, 2018)

Cu încărcările determinate se obțin cazuri de încărcare LC și combinațiile CO1 pentru combinația de încărcare cea mai defavorabilă; CO2 combinația în care sunt luate în calcul numai masele subsansamblelor fără materialul de încărcare din cupe sau transportor, tabelul 4.

Tabelul 3. Încărcările pe arborele roții cu cupe

Poz	Denumire	Valoare		Factorul de încărcare [γ]	Obs
		Normată [kg]	Calculată		
1	Greutatea proprie structură	Se determină automat de program		1,5	Conf. DIN 22261-2.
2	Roată cu cupe	27207	≈ 267 KN	1,1	
3	Cupă încărcătoare = 832 kg/buc x 9 buc.	7488	73,46 KN	1,1	
4	Cupă taietoare = 553 Kg/buc. X 9 buc.	4977	48,82 KN		
5	Material în cupa încărcătoare	2310 ^(a)	2310x4 buc. X 9.81 = 90,64 KN	1,1	
6	Reductor acționare roată cu cupe	34858 ^(b)	273,565 KN	1,1	

Tabelul 4. Cobiinațiile cazurilor de încărcare

Cobiinația	Descrierea încărcări
CO1	1.5*LC1 + LC2 + LC3 + 1.1*LC4 + 1.1*LC5 + 1.1*LC6 + 1.1*LC7 + 1.1*LC8 + 1.1*LC9 + 1.1*LC10 + LC12 + 1.1*LC13 + 1.1*LC14
CO2	1.5*LC1 + 1.1*LC2 + 1.1*LC3 + 1.1*LC4 + 1.1*LC5 + 1.1*LC6 + 1.1*LC7 + 1.1*LC9 + 1.1*LC10 + 1.1*LC13 + 1.1*LC14

➤ **Analiza deformațiilor** globale pentru combinația CO1, realizată din suma cazurilor de încărcare conform tabelului 4, situația cea mai defavorabilă (figura 7).

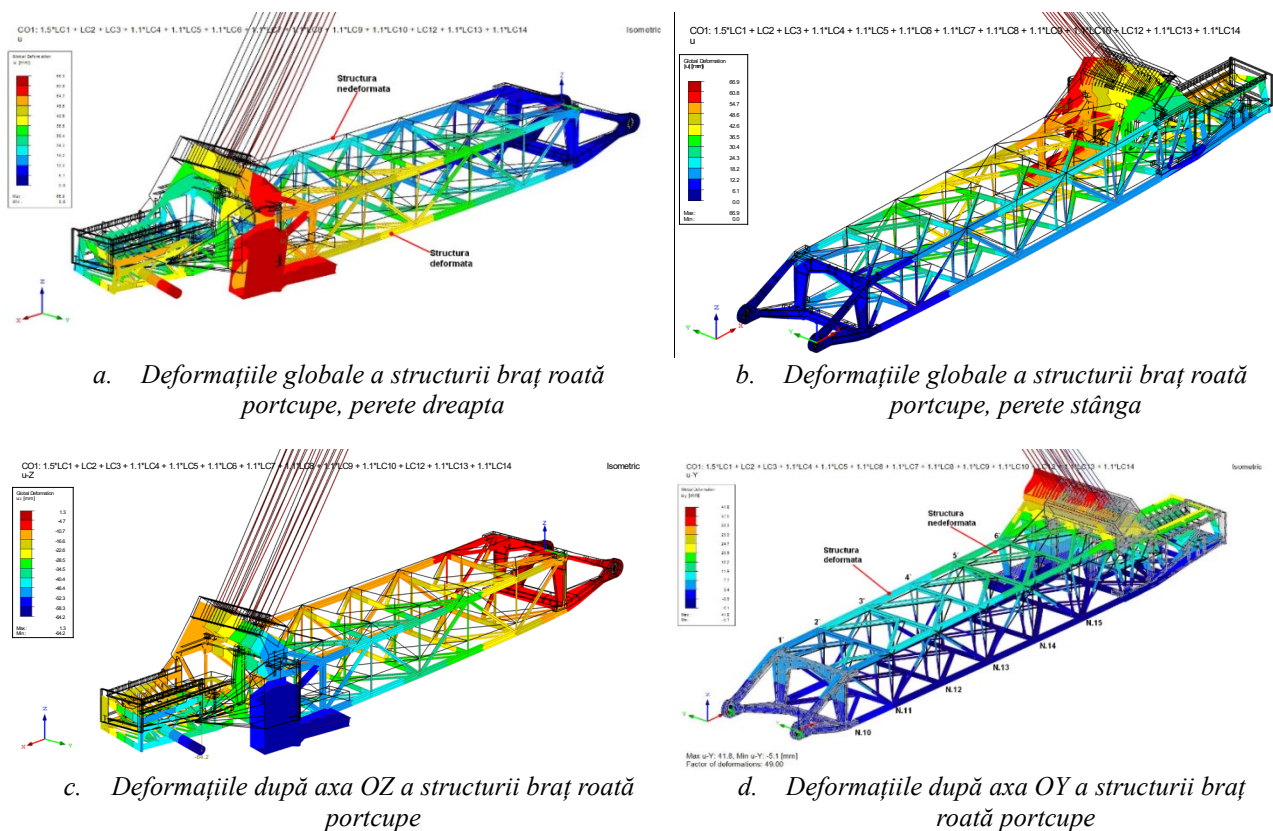


Fig. 7. Deformații ale structurii braț - roată portcupe

➤ **Analiza tensiunilor** pentru combinația CO1, în scopul stabilirii diagramelor tensiunilor pe elementele portante și

contravântuirile perete dreapta/stânga. Tensiunile care se determina este tensiunea echivalenta limită, care reprezintă tensiunea echivalentă permisă pentru efectul simultan al mai multor solicitări simultane pentru un element de tip bară, cu sistemul local de referință XYZ (figurile 8 și 9).

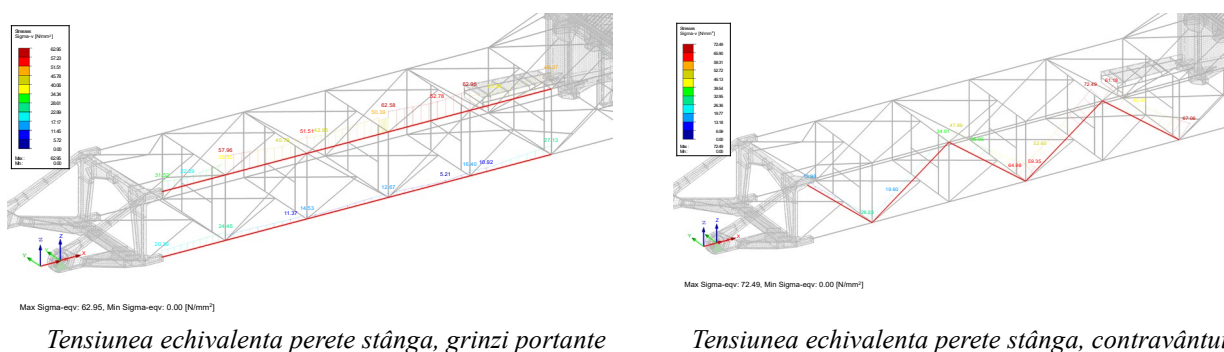


Fig.8. Tensiunea echivalenta perete stânga

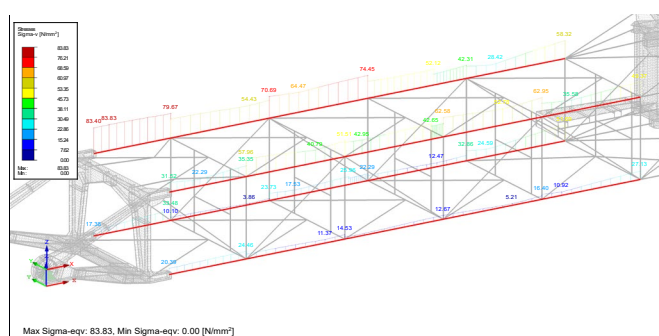


Fig.9. Tensiunea echivalentă comparativă perete dreapta/stânga, grinzi portante

4. Concluzii

- Elaborarea modelului de calcul pentru o situație dată se poate face cu o libertate deplină, în care esențiale sunt, ingeniozitatea și experiența utilizatorului. Suplețea MEF asigură elaborarea cu foarte mare ușurință a modelului de calcul și permite automatizarea acestui proces într-o foarte mare măsură;
- Pentru analiza utilajelor miniere de suprafață programul folosit trebuie să poată genera o serie de tipuri de elemente finite: elemente de tip bară/placă, elemente de tip rigid link sau elemente de tip bară rigidă, să poată realiza pe deplin conectarea elementelor de tip bară-placă;
- Din analiza deplasărilor globale, figura 7, peretele dreapta se deformează față de peretele stânga producându-se o rotire a față de reazemul articulat;
- Din analiza tensiunilor echivalente a grinzilor portante, figurile 8 și 9, grinda superioară perete dreapta este cea mai puternic tensionată.
- Din analiza tensiunilor echivalente a contravântuirilor perete dreapta/stânga, contravântuirile peretelui dreapta sunt mai solicitate, existând aproximativ o simetrie a tensiunilor pe barele contravântuirilor.

Bibliografie

1. Dinescu S., Radu S.M., Brînaș I.,(2019), *Mașini și utilaje pentru lucrări de infrastructură*. Editura Universitas, Petroșani.
2. Vilceanu F., Dinescu S, Radu S.M., (2022), *Mașini și utilaje pentru lucrări miniere și de infrastructură – lucrări de laborator*, Editura Universitas Petroșani
3. Vilceanu F.,(2018), *Teza de doctorat: Studiul duratei de viață pentru utilajele de extragere și depunere în depozite, utilizate în carierele din bazinul Olteniei*, Universitatea din Petroșani, Conducător științific: prof.univ.dr.ing. Radu Sorin Mihai

ASPECTE MECANICE PRIVIND COMPARAREA UNOR PERFORMANȚE SPORTIVE DIN PROBELE DE ARUNCĂRI DIN ATLETISM

Autori: Patrick COSTACHE¹, Răzvan CĂTANĂ¹
patrikcostache21@gmail.com

Coordonatori: Șef lucr.dr. ing Răzvan Bogdan ITU², Lector univ.dr. Cristian ILIONI³

¹ *Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Ingineria Transporturilor și Traficului anul I*

² *Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științe*

Rezumat

În stadiul actual de dezvoltare a științei și tehnicii privind creșterea preciziei de măsurare a diverse mărimi fizice, omologarea rezultatelor unor probe și recorduri sportive implică o deosebită atenție în scopul evitării comiterii unor erori inadmisibile. În lucrare se fac referiri la o anumită categorie de probe sportive și anume la compararea rezultatelor la probele de aruncări, probe care fac parte din categoria probelor de teren.

Cuvinte cheie

Probă sportivă, validare

1. Introducere

Atletismul este unul din cele mai populare sporturi din lume. Este o ramură sportivă care cuprinde diverse probe de alergări și de marș, de sărituri și aruncări, sau probe combinate, la care participă atleții.

Câștigătorul în competiție atletism este considerat a fi un concurent sau echipa cu cel mai bun record în cursa finală a încercărilor finale sau discipline tehnice.

Aruncările sunt acțiuni motrice stilizate, care urmăresc proiectarea prin aer a unui obiect special conceput (greutate, disc, suliță, ciocan, minge minge de oină), la o distanță cât mai mare, în concordanță cu prevederile regulamentului de desfășurare al probelor, care precizează: forma, dimensiunea și greutatea obiectelor; modul deținere a obiectului (priza) și a mișcărilor efectuate; dimensiunea suprafețelor de elan și a zonelor de recepție.

Valoarea rezultatelor în probele de aruncări depinde de: nivelul calităților motrice dominante: forța maximă, forța explozivă, viteza de execuție și capacitate de accelerare; gradul de coordonare tehnică, care să asigure un angajament maxim de forțe, în minimum de timp; structura somatică, exprimată prin robustețe, bazată pe talie și greutate mare, iar pentru disc și suliță și anvergura brațelor.

După modalitățile de aplicare ale forțelor de aruncare asupra obiectului aruncării, distingem trei tipuri de acțiuni specifice acestora:

- tip împingere – greutate, unde forța aruncătorului este exercitată asupra obiectului sub forma unei presiuni rectilinii orientate dinapoi spre înainte și de jos în sus;
- tip azvârlire – minge mică de oină și suliță, în care forța aruncătorului este aplicată asupra obiectului sub forma unei tracțiuni pe deasupra umărului pe o traiectorie rectiliniară orientată dinapoi spre înainte și de jos în sus;
- tip lansare – disc și ciocan, caracterizate de transmiterea forței aruncătorului asupra obiectului de aruncat sub forma unei tracțiuni prin lateral, pe o traiectorie curbilinie cu o mână (disc) ori cu două mâini (ciocan), orientată dinapoi spre înainte și de jos în sus.

Forța aruncătorului imprimă obiectului de aruncat o traiectorie de formă parabolică, ce determină caracteristicile de înălțime și de lungime a aruncării.

La toate probele de aruncări, obiectul este proiectat în aer pe o traiectorie asemănătoare unei parabole, la care, din cauza rezistenței aerului și a forței de gravitație, partea finală, descendentă, este mai scurtă și mai înclinată.

2. Aspecte privind aruncările atletice

Familia aruncărilor atletice, probe din categoria probelor de teren, se compune din patru probe de aruncări: aruncarea greutății, aruncarea discului, aruncarea suliței și aruncarea ciocanului. În funcție de modalitatea concretă în care se realizează gestul motric specific, aruncările atletice se pot împărți în două mari categorii:

Aruncări dominante în rotație - aruncarea discului, aruncarea ciocanului și aruncarea greutății (procedeu prin rotație). În aceste probe de aruncare, traiectoria materialului va fi rezultatul componente tangențiale a forței centrifuge ce se exprimă în momentul în care materialul părăsește mâna aruncătorului. Pentru că aruncarea să fie centrată în raport cu zona de recepție, materialul de concurs ar trebui să părăsească mâna aruncătorului imediat ce aceasta depășește diagonală care împarte zona de elan (cercul de aruncare) în jumătatea anterioară a cercului de aruncare (jumătatea cea mai apropiată de zona de elan) și jumătatea posterioară a cercului de aruncare (jumătatea opusă zonei de recepție, jumătate prin care regulamentul obligă atletul să iasă din cerc după efectuarea aruncării).

Aruncări dominante în translație – aruncarea suliței și aruncarea greutății (procedeu clasic). În aceste probe, acțiunile aruncătorului sunt efectuate preponderent în plan sagital (dinspre înapoi înspre înainte) implicând că sprijinul, acțiunile motrice și materialul să rămână și să acționeze cât mai aproape de acest ax.

Termenul de dominant este utilizat deoarece toate aruncările atletice fac apel în mod normal fie la mișcarea de rotație, fie la mișcarea de translație, fiecareia dintre cele două acțiuni corespunzându-le câte o aruncare cu material ușor și una cu material greu.

Factori interni care condiționează lungimea unei aruncări sunt viteza inițială cu care materialul de concurs părăsește mâna aruncătorului, unghiul de eliberare a materialului, înălțimea punctului de eliberare a materialului.

Viteza cu care materialul de concurs părăsește mâna aruncătorului (poartă și numele de viteza inițială) reprezintă factorul intern (care depinde de voința, posibilitățile fizice și tehnice ale sportivului) cel mai important în stabilirea lungimii unei aruncări. Această viteză este condiționată de o serie de factori, cum ar fi: cantitatea de forțe mobilizate pentru efectuarea aruncării, calitatea forțelor mobilizate pentru efectuarea aruncării, orientarea forțelor mobilizate pentru efectuarea aruncării, înălțimea forțelor aplicate pentru efectuarea aruncării, durata de aplicare a forțelor.

Unghiul de eliberare a materialului reprezintă al doilea factor ca importanță în stabilirea lungimii unei aruncări.

În raport cu ceilalți doi factori analizați (viteza de lansare a materialului și unghiul de lansare), înălțimea punctului de la care materialul părăsește mina aruncătorului, reprezintă factorul cu cea mai mică influență asupra lungimii aruncării.

Concluzionând, viteza inițială și unghiul de lansare rămân factorii interni ce pot influența în mod substanțial lungimea unei aruncări, înălțimea punctului de eliberare a materialului rămânând un element care prin el însuși nu poate aduce modificări semnificative în lungimea traiectoriei materialului.

Ca factori externi sunt forțele aerodinamice reprezentate de vântul real și vântul relativ, forța de frecare, atracția gravitațională, energia potențială (forță cu care ori ce corp este dotat în situația în care se găsește pe o traiectorie oarecare și suportă forța atracției gravitaționale).

În cazul aruncărilor cu material cu caracteristici planoare, aruncarea suliței și aruncarea discului, alte câteva elemente pot intra în discuție atunci când vorbim despre lungimea unei aruncări.

Unghiul de incidență, reprezintă poziția pe care materialul îl ia în raport de direcția traiectoriei centrului sau de gravitate.

Deschiderea laterală, reprezintă distanța laterală pe care o va lua materialul în raport de direcția sa de zbor (esențială în cazul aruncării discului și a aruncării suliței, nulă în cazul aruncării greutății și a aruncării ciocanului. (datorită sfericității materialului)

Stabilitatea giroscopică, reprezintă efectul mișcării de rotație imprimată în final materialului de concurs și care permite stabilizarea acestuia pe traiectoria de zbor. Foarte importantă în aruncarea discului și parțial în aruncarea suliței, inexistența în cazul aruncării ciocanului și al greutății.

3. Compararea și omologarea performanței

Actualmente privind creșterea preciziei de măsurare a diverselor mărimi fizice, omologarea rezultatelor unor probe și a unor recorduri sportive implică o atenție deosebită în scopul evitării comiterii unor erori.

În cele ce urmează ne vom referi la aspectele mecanice, și anume la accelerația gravitațională, la o anumită categorie de probe de concurs athletic, din categoria probelor de teren, care privesc aruncarea diferitelor corpuri ca: ciocan, disc, suliță etc., care pot fi ținute în localități situate pe latitudini diferite și la diferite altitudini față de nivelul mării (nivelul de referință).

Considerăm, de exemplu, cazul aruncării unui corp greu cu o viteză inițială v_0 sub un unghi α față de planul orizontal, care este în același timp și planul terenului pe care se face aruncarea.

Neglijând factorul extern de rezistență a aerului, distanța la care cade corpul aruncat față de punctul de lansare este:

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \quad (1)$$

în care g este accelerația gravitației terestre în locul respectiv. Presupunând că v_0 și α sunt constante, rezultă că:

$$L = \frac{C}{g}, \quad C = v_0^2 \sin 2\alpha = \text{const.}, \quad (2)$$

Eroarea relativă de măsură comisă asupra lui L rezultă din (2):

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta g}{g}, \quad (3)$$

Ținând seama că $\Delta C = 0$, din (3) rezultă că eroarea absolută de măsură a lui L este:

$$\Delta L = L \frac{\Delta g}{g}, \quad (4)$$

În (4) Δg reprezintă eroarea absolută de măsură asupra lui g și care de fapt este variația accelerației gravitaționale datorită variației altitudinii sau latitudinii.

Să considerăm mai întâi Δg (și deci și ΔL) ca funcție de altitudine. Pentru aceasta vom porni de la relația care exprimă legea atracției universale:

$$G_0 = mg_0 = K \frac{mM}{r_0^2}, \quad (5)$$

în care g_0 reprezintă valoarea accelerației gravitaționale la suprafața Pământului considerat de formă sferică cu raza r_0 , m - masa corpului aruncat, M - masa Pământului, iar K - constanta atracției universale.

Aceeași lege scrisă pentru $r > r_0$ conduce la:

$$G = mg = K \frac{mM}{r^2}, \quad (6)$$

Dacă $r = r_0 + h$ în care h reprezintă altitudinea la care se afla corpul considerat față de nivelul mării (nivelul de referință), prin compararea (5) cu (6) rezultă:

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \Rightarrow g = g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \quad (7)$$

Deoarece $h^2 \ll r_0^2$ relația (7) devine:

$$g = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0 + h)^2} = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)^2} = \frac{g_0}{1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0}\right)^2} \cong \frac{g_0}{1 + 2h/r_0}, \quad \text{unde } \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \cong 0, \quad (8)$$

De asemenea, deoarece $4h^2 \ll r_0^2$, relația (8) se mai poate scrie și sub forma:

$$g = \frac{g_0}{1 + 2h/r_0} = \frac{g_0}{1 + \frac{2h}{r_0}} \cdot \frac{1 - \frac{2h}{r_0}}{1 - \frac{2h}{r_0}} = \frac{g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0}\right)}{1 - \left(\frac{2h}{r_0}\right)^2} \cong g_0 \left(1 - \frac{2h}{r_0}\right), \quad \text{unde } \left(\frac{2h}{r_0}\right)^2 = \frac{4h^2}{r_0^2} \cong 0, \quad (9)$$

Din (9) determinăm Δg :

$$\Delta g = g_0 - g = \frac{2g_0 h}{r_0} \Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{2h}{r_0}, \quad (10)$$

Dacă se consideră $h = 1 \text{ km}$, având în vedere că $r_0 \cong 6370 \text{ km}$ din (10) rezultă $\Delta g / g = 3,1 \cdot 10^{-4}$.

Revenind la relația (4) în care luăm $g = g_0$, avem:

$$\Delta L = L \frac{\Delta g}{g} = 3,1 \cdot 10^{-4} L, \quad (11)$$

Dacă se ia $L = 100 \text{ m}$, rezultă $\Delta L = 3,1 \text{ cm}$.

Aceasta înseamnă că variația distanței L la care este aruncat corpul, datorită variației accelerației gravitaționale în funcție de altitudine, este mai mare ca eroarea absolută de măsurare a distanțelor la concursurile sportive și care, la ora actuală, este de 1 cm .

Ca urmare, rezultatele obținute la concursurile sportive de aruncare a greutăților, ținute în localități situate la aceeași latitudine, însă la altitudini diferite față de nivelul mării (nivelul de referință) nu sunt comparabile între ele, dacă diferența de altitudine între localități este mai mare de circa 320 m .

Pentru a putea compara două distanțe de aruncare, a aceleiași greutate, L și L_0 este necesar ca acestea să fie raportate la același nivel de referință (nivelul mării):

$$L = \frac{C}{g}, \quad L_0 = \frac{C}{g_0} \Rightarrow L_0 = L \frac{g}{g_0}, \quad (12)$$

A treia ecuație din relația (12) ne permite să determinăm distanța L_0 la care ar fi aruncat corpul la nivelul mării (nivelul de referință) unde accelerația gravitației terestre este g_0 , în funcție de distanța L la care este aruncat corpul cu aceeași viteză inițială v_0 și sub același unghi α față de planul orizontal, într-o localitate situată la o altitudine h față de nivelul mării și unde accelerația gravitației este g .

Sa luăm acum în considerație și influența latitudinii λ , a locului unde are loc concursul sportiv, asupra distanței la care cade un corp aruncat cu aceeași viteză inițială v_0 și sub același unghi α față de planul orizontal, dacă altitudinea locului $h = 0$, adică la nivelul de referință (nivelul mării).

Se poate utiliza în acest scop relația cunoscută:

$$g = g_0 (1 - k \cos^2 \lambda), \quad (13)$$

în care $k = 3,46 \cdot 10^{-3}$ este un coeficient numeric, g_0 – accelerația gravitației terestre la nivelul mării și la ecuator ($g_0 \cong 9,8 \text{ m/s}^2$), Pământul fiind considerat sferic, în mișcare de rotație în jurul axei polilor, iar g – accelerația gravitației terestre la nivelul mării și la latitudinea $\lambda > 0$.

Din (13), avem:

$$g_0 = \frac{g}{1 - k \cos^2 \lambda} \cdot \frac{1 + k \cos^2 \lambda}{1 + k \cos^2 \lambda} \cong g (1 + k \cos^2 \lambda), \quad (14)$$

sau:

$$g_0 = g + \Delta g, \quad \Delta g_0 = g k \cos^2 \lambda, \quad (15)$$

Revenind la relația (4) și ținând seama de ecuația a doua din relația (15), avem:

$$\Delta L = L - L_0 = L \frac{\Delta g}{g} = Lk \cos^2 \lambda, \quad (16)$$

Dacă $\lambda = 45^\circ$ din (16) rezultă:

$$\Delta L = 3,46 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot L = 1,73 \cdot 10^{-3} L, \quad (17)$$

În sfârșit, dacă în (17) luăm $L = 100 \text{ m}$, rezultatul este $\Delta L = 0,173 \text{ m} = 17,3 \text{ cm}$. Aceasta înseamnă că variația distanței la care cade un corp lansat cu aceeași viteză inițială, sub același unghi față de planul orizontal, în două localități diferite, situate la nivelul mării (aceiași nivel de referință), însă la latitudini diferite $\lambda_0 = 0$ și $\lambda = 45^\circ$ este mai mare decât eroarea absolută de măsurare a distanțelor la probele sportive și care este de 1 cm . Deci rezultatele probelor sportive de aruncare a diferitelor corpuri: ciocan, disc, suliță etc. în astfel de localități nu sunt comparabile.

Concluzii

Rezumând raționamentele expuse trebuie să reținem în final că, pentru a compara și omologa recordurile referitoare la distanțele la care sunt aruncate diferite corpuri la concursuri sportive desfășurate în localități cu altitudini și latitudini diferite, este necesar ca distanțele de aruncare să fie raportate la altitudinea $h = 0$ și latitudinea $\lambda = 0$ (sau în orice caz la aceeași altitudine și latitudine).

Raportarea distanțelor respective la $h = 0$ și $\lambda = 0$ înseamnă calculul acestora la nivelul mării (nivelul de referință) și la ecuator.

Bibliografie

- [1] Sfichi, R., Caleidoscop de fizică, Editura Albatros, București, 1988;
- [2] *** <https://www.qdidactic.com/sanatate-sport/sport/bazele-tehnice-ale-probelor-de-aruncari558.php>
- [3] *** <http://infoatletism.ro/index.php/metodica/aruncari-generalitati>

ASPECTE PRIVIND CURBELE DE ORIGINE MECANICĂ

Autori: Radu-Sebastian COJOCARU ¹, Xenia-Denisa VLĂDUȚU ¹
sebastianradu.cojocaru@gmail.com

Coordonatori: Șef lucr. dr. ing Răzvan Bogdan ITU ², Șef lucr. dr. ing. Bogdan Gheorghe URDEA ²

¹ Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Mașini și echipamente miniere, anul I

² Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E

Rezumat

În lucrare sunt prezentate câteva exemple de curbe de origine mecanică, obținute prin rostogolirea unei curbe de-a lungul alteia.

Cuvinte cheie

Cube, origine, mecanică.

1. Introducere

Intuitiv, curbele nu sunt altceva decât deformări ale unor drepte. Pot fi gândite, prin urmare, ca fiind obiecte "unidimensionale". Suntem familiarizați, deja, cu unele dintre ele din matematica elementară, deoarece, desigur, graficele de funcții pot fi considerate ca fiind curbe, din acest punct de vedere. Pe de altă parte, de regulă, curbele nu sunt grafice. Este suficient să ne gândim la o elipsă sau, în particular, la un cerc. Pe de altă parte, putem reprezenta coordonatele fiecărui punct de pe o curbă ca funcții de un parametru real. După cum vom vedea, aceasta este, de obicei, cea mai convenabilă modalitate de a reprezenta, local, o curbă.

De multe ori am considerat ecuații de forma:

$$y = f(x) \text{ sau } x = g(y), \quad (1)$$

și am studiat curba lor corespunzătoare. O astfel de formă de prezentare a curbei, când una dintre coordonatele unui punct curent al ei este dată sub forma unei funcții explicite (uniforme) de cealaltă coordonată, se numește *explicită*. Ea se bucură de anumite proprietăți de simplitate; orice altă formă sub care este dată curba - într-un anumit sens - poate fi redusă la aceasta.

În legătură cu funcțiile implicite putem de asemenea vorbi de forma implicită sub care este dată curba, adică de definirea unei curbe printr-o ecuație de forma:

$$F(x, y) = 0, \quad (2)$$

nerezolvată nici în raport cu x , nici în raport cu y . O astfel de ecuație poartă numele de ecuație *implicită* a curbei.

În sfârșit, ecuațiile de forma:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3)$$

care stabilesc dependența coordonatelor curente ale unui punct de un anumit parametru t , definesc de asemenea o curbă în plan. Ecuațiile de acest fel se numesc parametrice; ele dau forma *parametrică* de definire a curbei.

În concluzie, curba este locul geometric al punctelor, care verifică, o relație analitică de forma (1), (2) sau (3) - în ipoteza continuității funcțiilor care intervin în ele și a derivatelor lor.

2. Curbe de origine mecanică

În continuare vom enumera câteva exemple de curbe în plan, de origine mecanică, obținute prin rostogolirea unei curbe de-a lungul alteia. În cele ce urmează, vom considera exemplele de curbe definite în coordonate rectangulare și în coordonate polare.

Cicloida.

Ne închipuim că pe dreapta Ox (fig. 1) de la stânga la dreapta se rostogolește fără alunecare un cerc de rază a cu centrul în A . Curba descrisă de un punct oarecare al circumferinței se numește cicloidă.

Să luăm de exemplu drumul punctului O în timpul unei singure rostogoliri a cercului.

Considerăm cercul care se rostogolește într-o poziție diferită de cea inițială. Punct de contact va fi acum un alt punct, N ; astfel pe dreaptă punctul de contact s-a deplasat cu distanța ON . În același timp punctul O s-a deplasat în poziția M , descriind pe circumferința cercului, arcul NM . Deoarece rostogolirea se efectuează fără alunecare, aceste drumuri vor fi egale:

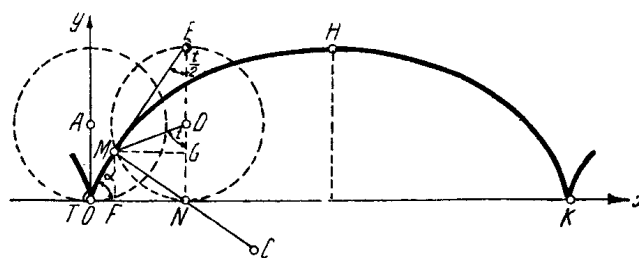


Fig. 1. Cicloida

$$\overline{NM} = ON, \quad (4)$$

Dacă alegem acum ca parametru care să definească poziția punctului, $\angle t = \angle NDM$, unghi cu care s-a rotit raza față de poziția sa inițială verticala AO cu raza la un moment arbitrar, atunci coordonatele x și y ale punctului M se exprimă în modul următor:

$$\begin{aligned} x &= OF = ON - FN = \overline{NM} - MG = at - a \sin t \\ y &= FM = NG = ND - GD = a - a \cos t \end{aligned}, \quad (5)$$

Astfel, ecuațiile parametrice ale cicloidei sunt de forma:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (6)$$

Prin variația lui t de la $-\infty$ la $+\infty$ se obține curba formată dintr-o infinitate de ramuri de tipul celei desenată în figura 1.

Deoarece derivatele parțiale

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t, \quad (7)$$

se anulează simultan pentru $t = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) aceste valori ale parametrului definesc punctele singulare ale curbei.

Dar:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad (8)$$

astfel că de exemplu pentru $t \rightarrow \pm 0$ (sau pentru $x \rightarrow \pm 0$) derivata y'_x tinde către $\pm\infty$; evident că în origine ca și în celelalte puncte singulare, tangenta este verticală; ne aflăm în fața unor vârfuri (puncte de întoarcere).

Dacă punctul ce descrie cicloida se află în interiorul cercului generator care se rostogolește cicloida se numește *cicloidă scurtată* (fig. 2); dacă punctul se află în afara, cercului generator cicloida se numește *cicloidă alungită* (Fig. 3)

Cele trei cicloide se pot observa la mișcarea roții unui tren, roata este formată din trei părți, fiecare parte descrie câte o cicloidă de un anumit tip.

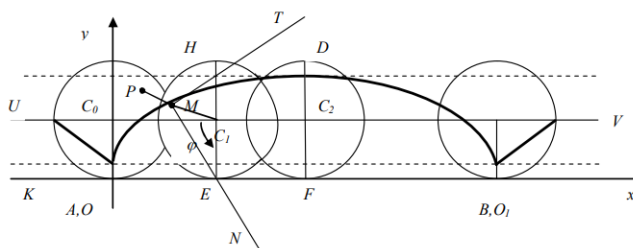


Fig. 2. Cicloidă scurtată

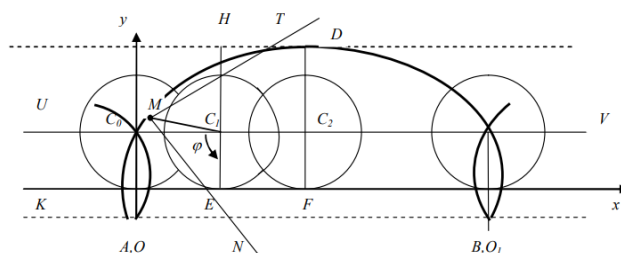


Fig. 3. Cicloidă alungită

Epicycloida și hypocicloida.

Dacă un cerc se rostogolește fără alunecare pe exteriorul unui alt cerc, curba descrisă de un punct arbitrar al cercului care se mișcă, se numește *epicycloidă*. În cazul în care rostogolirea se face în interior, obținem *hypocicloida*.

Vom stabili ecuația primei dintre aceste curbe.

Alegem centrul axelor de coordonate în centrul O al cercului fix, și ducem axa Ox prin poziția A a punctului urmărit, în care el este punct comun ambelor cercuri (fig. 4). Când cercul mobil are o altă poziție, arătată pe figură, punctul A trece în M . Locul geometric al punctelor M este curba căutată.

Notăm prin a raza cercului fix și prin ma - raza cercului care se rostogolește. Să alegem ca parametru unghiul t , ($\angle t = \angle MCB$), dintre raza CM , care unește centrul cercului care se rostogolește cu punctul considerat de pe circumferința lui, și raza CB dusă în punctul de contact. La începutul mișcării presupunem acest unghi egal cu 0.

Întâi să observăm cum se manifestă aici absența alunecării. Arcul AB descris de punctul de contact pe cercul fix trebuie să fie egal cu arcul MB , descris de punctul de contact pe circumferința care se rostogolește:

$$\begin{aligned} a \cdot \angle AOB &= ma \cdot \angle MCB = mat \\ \text{de unde } AOB &= mt \end{aligned}, \quad (9)$$

Să exprimăm acum coordonatele x și y ale punctului M prin t . Avem

$$x = OG = OE + FM = (a + ma) \cos mt + ma \sin \angle FCM, \quad (9)$$

dar

$$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE \quad \text{si} \quad \angle OCE = \frac{\pi}{2} - mt, \quad (10)$$

astfel că:

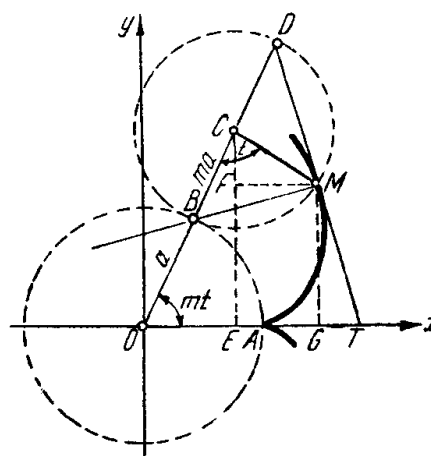


Fig. 4. Construcția epicycloidei

$$\square FCM = (1+m)t - \frac{\pi}{2} \text{ si } \sin \square FCM = -\cos(1+m)t, \quad (11)$$

Rezultă expresia finală:

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t], \quad (12)$$

În mod asemănător obținem:

$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t], \quad (13)$$

Aceste ecuații dau reprezentarea parametrică a epicloidei.

Când cercul care se rostogolește ajunge din nou în contact cu cercul fix în același punct al său, atunci de la începutul mișcării (adică pentru $t = 2\pi$), punctul M descrie o ramură a curbei.

Prin rostogolirea mai departe punctul M va descrie următoarea ramură, asemănătoare cu prima, și așa mai departe. Derivatele parțiale:

$$\begin{aligned} x'_t &= -m(m+1)a[\sin mt - \sin(1+m)t] \\ y'_t &= m(m+1)a[\cos mt - \cos(1+m)t] \end{aligned} \quad (14)$$

se anulează simultan pentru $t = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) adică de fiecare dată când punctul considerat de pe cercul în mișcare devine punct de contact. Punctele considerate ale curbei se numesc vârfuri (puncte de întoarcere).

În cazul *hipocicloidei*, în mod asemănător se obțin următoarele ecuații parametric:

$$\begin{aligned} x &= a[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t] \\ y &= a[-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t] \end{aligned} \quad (15)$$

Aici m reprezintă de asemenea raportul dintre raza cercului care se rostogolește și raza cercului fix. Se observă ușor că aceste ecuații se obțin din ecuațiile epicloidei schimbând m prin $-m$.

În figura 5 sunt reprezentate epicloidele, corespunzătoare lui $m = 1, 2$, și $1/3$, și hipocicloidele corespunzătoare lui $m = 1/3$ și $1/4$, în ultima fiind recunoscută astroida.

Evolventa cercului.

Să presupunem acum că pe cercul descris din centrul O cu raza a este desfășurat în sensul acelor de ceasornic un fir; presupunem extremitatea acestui fir în punctul A . Să depănăm (în sens contrar acelor unui ceasornic) acest fir întinzându-l pe cerc de fiecare dată până la sfârșitul său. Curba descrisă de această extremitate a firului se numește evolventa cercului.

Luăm originea axelor de coordonate în punctul O (fig. 6) și ducem axa Ox prin punctul A . Când vom depăna partea AB a firului, ea va avea poziția BM , pe tangentă la cerc, și punctul A trece în M . Astfel, $AB = BM$. În rolul parametrului luăm unghiul $\square t = \square AOB$ dintre razele OA și OB . Coordonatele x, y ale punctului M se exprimă în modul următor:

$$x = DC - DO = BF - DO = BM \sin \square BMC - OB \cos \square DOB, \quad (16)$$

dar $x = BM = AB = at$, și $\square BMC$ și $\square DOB$ sunt egale cu $\pi - t$, astfel că:

$$x = at \sin(\pi - t) - a \cos(\pi - t) = a(t \sin t + \cos t), \quad (17)$$

Mai departe:

$$\begin{aligned} y &= CM = CF + FM = DB + FM = \\ &= OB \sin \square DOB + BM \cos \square BMC = a(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \quad (18)$$

Astfel curba noastră admite următoarele ecuații parametric:

$$x = a(t \sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad (19)$$

Unicul punct singular se obține pentru valoarea $t = 0$ pentru care se anulează ambele derivate parțiale:

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t, \quad (20)$$

Sunt cazuri în care reprezentarea parametrică decurge natural din însăși definirea curbei. Considerăm ca exemplu linia elicoidală. Ea poate fi obținută în felul următor. Să presupunem că un anurnit, punct M , aflat inițial în A (fig.

7), se rotește uniform în jurul axei Oz (de exemplu în sensul acelor unui ceasornic) și în același timp suferă o mișcare de translație uniformă paralelă cu această axă (să zicem în sensul pozitiv). Traectoria punctului M se numește linie elicoidală. Ca parametru care definește poziția punctului M se poate lua unghiul t , format de proiecția OP a segmentului OM cu axa Ox . Coordonatele x și y ale punctului M vor fi aceleași ca și ale punctului P adică $x = a \cos t$ și $y = a \sin t$, unde a este raza cercului descris de punctul P . În ceea ce privește deplasarea pe verticală (efectuează uniform), adică $z = z$, ea este proporțională cu unghiul de rotație t (deoarece și translația și rotația se ct). Ecuațiile parametric ale

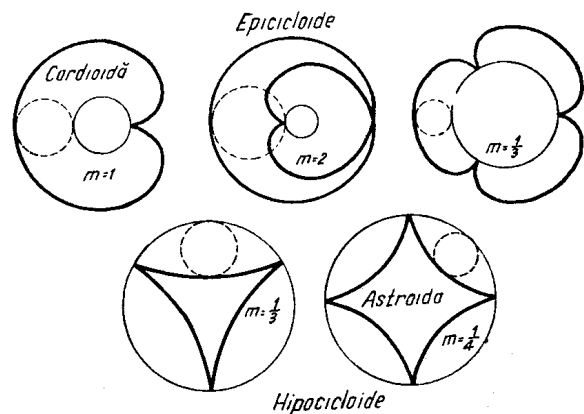


Fig. 5. Epicloide și hipocicloide

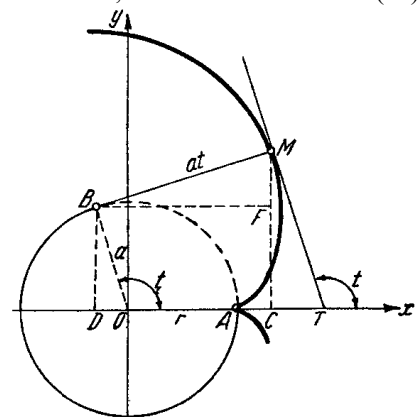


Fig. 6. Evolventa cercului

liniei elicoidale, după cum rezultă, sunt:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct. \quad (21)$$

Linia elicoidală obținută se numește stângă; pentru un sistem de axe de coordonate orientat direct, aceleași ecuații definesc o linie elicoidală dreaptă.

Din ecuațiile (21) parametrul t se elimină ușor și se trece astfel la forma explicită; de exemplu scoțând t din ultima ecuație și înlocuind valoarea sa în primele două, obținem:

$$x = a \cos \frac{z}{c}, \quad y = a \sin \frac{z}{c}, \quad (22)$$

În multe cazuri se obțin simplificări dacă se consideră curbele definite prin ecuații polare, care stabilesc legătura dintre coordonatele polare curente, r, θ ale unui punct al curbei.

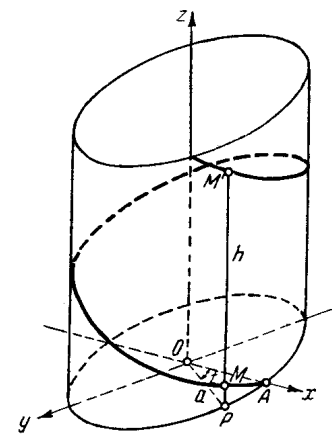


Fig. 7. Linia elicoidală

Unghiul polar θ este măsurat de la axa polară, considerând direcția ei pozitivă, în sensul acelor unui ceasornic. Raza vectorială r poate fi atât pozitivă cât și negativă; în primul caz ea măsoară distanța pe direcția definită de unghiul θ , și în al doilea pe direcția contrară.

Ca și în cazul coordonatelor rectangulare, și aici dependența dintre r și θ poate fi dată în forma explicită, implicită sau parametrică.

Ne vom opri mai ales la cazul simplu, când curba este definită printr-o ecuație explicită de forma $r = f(\theta)$.

Dacă se trece la coordonate rectangulare, luând ca de obicei polul ca centru al axelor de coordonate, și axa polară ca axă Ox , ecuațiile:

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta, \quad (23)$$

dau forma parametrică, a curbei, în care rolul parametrului va fi jucat de unghiul polar θ . Funcțiile obținute aici, de variabila θ , împreună cu f , sunt continue și au derivate continue.

Formulele:

$$\begin{aligned} x'_\theta &= r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta \\ y'_\theta &= r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta \end{aligned} \quad (24)$$

arată, că punct singular se întâlnește doar în cazul când $r = r'_\theta = 0$.

Vom considera în continuare un exemplu.

Spirala lui Arhimede: $r = a\theta$ (fig. 8).

Această curbă poate fi considerată ca traiectorie a unui punct care se mișcă uniform pe o rază care trece prin pol, în timp ce această rază se rotește uniform în jurul polului. Pentru a construi punctele A, B, C, D, \dots aparținând curbei, luăm pe verticala $OA = a(\pi/2)$ și apoi luăm $OB = 2 OA, OC = 3 OA, OD = 4 OA$ etc. pe drepte care fac unghiurile corespunzătoare $2\pi/2, 3\pi/2, 4\pi/2$, etc.

Când unghiul θ variază de la 0 la ∞ se obțin infinit de multe ramuri ale curbei $OABCD, DEFGH, \dots$; distanțele dintre ramurile vecine măsurate pe rază sunt egale cu $2\pi a$.

Unghiul θ poate primi și valori negative, de la 0 la $-\infty$. Atunci se obține cea de-a doua parte a curbei $OAB'CD' \dots$, construită punctat; aceasta este simetrică cu prima.

Observăm ca ecuația $r = a\theta + b$ reprezintă de asemenea *spirala lui Arhimede* dacă se ia axa polara cu unghiul $\alpha = -b/a$, această ecuație

se reduce la forma $r = a\theta$.

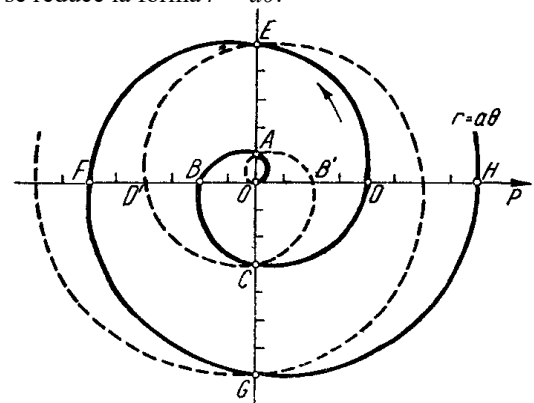


Fig. 8. Spirala lui Arhimede

Concluzii

Teorema proiecțiilor demonstrează pe cale cinematică rigiditatea unui solid, această teoremă este utilizată pentru și determinarea distribuției de viteze în mișcarea plan-paralelă. Teorema coliniarității extremităților vectorilor viteze a trei puncte coliniare folosește la studiul vitezelor în mișcarea plan-paralelă.

Bibliografie

- [1] Fihtenholț, G.,M., Curs de calcul diferențial și integral, Editura Tehnică, București, 1963;
 [2] *** //https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/Conferinta_cadre%20didactice_2013_volII_pp24-35.pdf.pdf